RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ

MATHEMATICAL AND MECHANICAL SCIENCES

https://doi.org/10.36719/2663-4619/109/142-149

Səltənət Veysova
H. Əliyev adına Hərbi İnstitut
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi
seltenet.veysova63@gmail.com

Adi diferensial tənliklərin pikar üsulu ilə həllində xətaların qiymətləndirilməsi

Xülasə

Məqalədə adi diferensial tənliklərin Pikar üsulu ilə həllin qurulması metodunun nəzəri əsasları göstərilmiş, istinad olunan teorem və təkliflərin fərqli təribatı verilmiş və uyğun isbat mexanizmi öz əksini tapmışdır. Diferensial tənliklərin həllində ardıcıl yaxınlaşmaların verilmiş çoxluqda müntəzəm olaraq hər hansı bir funksiyaya yığılması tədqiq olunmuş və bu yaxınlaşma zamanı uyğun limitin inteqral tənliyin həlli olması göstərilmişdir. Tədqiqat zamanı həmçinin müntəzəm yığılan bütün yaxınlaşmaların müəyyən düzbucaqlının daxilində yerləşməsi və klassik nəzəriyyəyə əsasən tənliyin həllinin yalnız məhdud oblastın daxilindən kənara çıxmadığı faktı izah olunmuşdur.

Açar sözlər: *pikar yaxınlaşması, həllin varlığı və yeganəliyi, lipşits şərti, inteqral tənlik, ardıcıl yaxınlaşma, müntəzəm yığılma*

Saltanat Veysova
Military Institute named after H. Aliyev
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
seltenet.veysova63@gmail.com

Assessment of Errors in Solving Ordinary Differential Equations Using the Picard Method

Abstract

The article shows the theoretical foundations of the method for constructing solutions to ordinary differential equations using the Picard method, provides a different formulation of the mentioned theorems and statements, and also reflects the corresponding proof mechanism. In the solving differential equations, the uniform convergence of successive approximations to any function from a given set is investigated and it is shown that the limit in this approximation is a solution to the integral equation. In the process of research, it was also explained that all uniform convergence of successive approximations are located inside a certain rectangle, and it was also shown that, according to classical theory, the solution of the equation does not extend beyond only a limited area.

Keywords: *picard approach, existence and uniqueness of the solution, Lipschitz condition, integral equation, successive approximation, uniform convergence*

Giriş

Diferensial tənliklərin inkişaf etmiş zəngin nəzəriyyəsi riyaziyyatın digər inkişaf etmiş sahələri və tətbiqi ilə əlaqəlidir. Bu nəzəriyyəyə müxtəlif tip diferensial tənliklərin ümumi həllinin tapılması və istiqamətlər meydanına əsasən inteqral əyrilərinin qurulması (onun həndəsi izahı) daxildir. Bu da onu deməyə əsas verir ki, ixtiyari birtərtibli diferensial tənlik sonsuz sayda həllər çoxluğuna ma likdir və hər bir (x_0, y_0) nöqtəsindən yalnız bir inteqral əyrisi keçir. (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən və $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən $y' = f(x, y)$ diferensial tənliyinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün Koşi məsələsinin ardıcıl yaxınlaşma metodu ilə təqribi olaraq hesablanmasının mümkünlüyü Pikar tərəfindən isbat olunmuşdur (Pontryagin, 1986). $y' = f(x, y)$ tənliyinin ardıcıl yaxınlaşma metodu ilə həllin varlığı $f(x, y)$ funksiyasının y dəyişəninə nəzərən Lipşits şərtinin ödənilməsi ilə isbat olunmuşdu. Digər metodlarla həllin varlığı teoremini ümumi fərziyyələrlə də isbat etmək olar (Blandin, 2013, s. 2449-2451). Belə ki, həllin varlığı üçün $f(x, y)$ funksiyasının hər iki x və y arqumentlərinə nəzərən yalnız kəsilməzliyi şərtini qoymaq olar. Əgər $f(x, y)$ funksiyasına əlavə şərtlər qoyulmasa, onda $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərti yalnız bir həlli müəyyən etmir, yəni yeganəlik teoreminə ehtiyac qalmır (Petrovskiy, 2009). Əgər $y' = f(x, y)$ diferensial tənliyində $f(x, y)$ funksiyasının hər iki x və y arqumentlərinə nəzərən yalnız kəsilməzliyi şərti qoyularsa, onda $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərti ödəyən heç olmasa bir həllin varlığını isbat etmək olar.

Tədqiqat

Məsələnin qoyuluşu və tədqiqatı

Diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi teoreminin çoxlu sayda yazılış ifadəsi və isbat metodları vardır. Bu teoremin isbatı üçün əvvəlcə Pikar teoreminin isbatı verilir. Burada fərz edilir ki,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

tənliyinin sağ tərəfindəki $f(x, y)$ funksiyası

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

başlanğıc sərtini ödəyir. Pikar teoremi isbat edir ki, (1) tənliyinin sağ tərəfindəki $f(x, y)$ funksiyası müəyyən düzbucaqlının daxilində kəsilməzdir və y-ə görə Lipşits şərtini ödəyir. Diferensial tənliklərin həllinin varlığı üçün $f(x, y)$ funksiyasının yalnız kəsilməz olması kifayətdir və Peano teoremi vasitəsilə həllin varlığının isbatı $f(x, y)$ funksiyasının y-ə görə Lipşits şərtinin ödənilməsi şərti qoyulmadıqda da mümkündür. Ümumiyyətlə, həllin varlığı teoremləri qeyri-konstruktiv xarakter daşıyır (Astashova, 2012). Çünki bu teoremlər həllin varlığının necə qurulmasını göstərmir, yalnız tənliyin həllinin varlığını və əlavə olaraq başqa şərtlərin də ödənilməsini, onun yeganəliyini və kəsilməz olaraq tənliyin sağ tərəfindən asılı olmasını göstərir. Ona görə də həm riyazi fizika tənliklərində, eləcə də xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllində də bu teorem həllin qurulması imkanını vermir. Pikar teoremi isə bu imkanı təmin edir və həllin qurulmasının konsruktiv metodunu verə bilir (Egorov, 2005).

Bu məqalədə adi diferensial tənliklərin Pikar üsulu ilə həllin qurulması metodunun nəzəri əsasları göstərilmiş, istinad olunan teorem və təkliflərin fərqli təribatı verilmiş və uyğun isbat mexanizmi öz əksini tapmışdır.

Pikar teoremi. Fərz edək ki, $f(x, y)$ funksiyası hər hansı Π düzbucaqlısında kəsilməzdir və Lipşits şərtini ödəyir. Yəni $f(x, y) \in C(\Pi) \cap Lip_y(\Pi)$. Burada Π düzbucaqlısı

$$\Pi = \{(x, y);\ |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

kimi təyin olunmuşdur. Onda (1), (2) məsələsinin $[x_0 - h, x_0 + h]$ parçasında həlli var və bu həll yeganədir.

Burada $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{L}\right)$, $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x, y)|$, L -Lipşits sabitidir, yəni əgər

$$\exists L > 0, \forall (x, y'), (x, y'') \in \Pi$$

üçün

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < L|y' - y''|$$

şərti ödənirsə, onda $f \in Lip_y(\Pi)$.

Bu teorem üçün məsələnin qoyuluşunda digər teoremlərdən fərqli olaraq fərz edilir ki, həllin varlığı və yeganəliyinin isbatı zamanı yalnız $f(x,y)\in C(\Pi)\cap Lip_y(\Pi)$ şərtinin ödənilməsindən istifadə olunur. Bu şərtlər teoremin isbatını sadələşdirir, həllin varlığı və yeganəliyin təqribi yaxınlaşma üsulu (Pikar üsulu) ilə isbat olunmasına imkan yaradır (Veysova, Paşayeva, Rəsulova, 2020, s. 40-46).

Pikar teoreminin isbatına keçməzdən əvvəl inteqral tənliklər haqqında lemmanı isbat edək.

Lemma. $y(x)$ funksiyası yalnız və yalnız o zaman (1), (2) məsələsinin həllidir ki, bu funksiya

$$= y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds \tag{3}$$

inteqral tənliyinin həlli olsun.

İsbatı: 1) Fərz edək ki, *y(x)* funksiyası (1), (2) məsələsinin həllidir. (1) tənliyinin hər iki tərəfini $[x_0, x]$ parçasında inteqrallayaq.

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds$$

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = y(x) - y(x_0) \Rightarrow y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds$$

$y(x_0) = y_0$ olduğundan $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds$ alınır. Buradan aydın olur ki, kəsilməzlik şərti ödənir. *y(x)* diferensial tənliyin həllidirsə, onda bu funksiyanın özü və törəmələri kəsilməzdir, deməli, (3) inteqral tənliyinin həllidir. Lemmanın 1) şərti isbat olundu. İndi isə əksini isbat edək.

2) Fərz edək ki, *y(x)* funksiyası (3) inteqral tənliyinin həllidir. Qeyd edək ki, $f\left(x, y(x)\right)$ inteqralaltı funksiyası kəsilməz funksiyaların kompozisiyasından ibarət olduğundan alınır ki, yuxarı sərhəddi dəyişən olan inteqralın törəməsi var və bu törəmə kəsilməzdir. Beləliklə, (3) inteqral tənliyini diferensiallasaq,

$$y' = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y(s)\right) ds \right)' \Rightarrow y' = f\left(x, y(x)\right)$$

alarıq. Buradan alınır ki, y' kəsilməzdir və (1) tənliyini ödəyir. (3) inteqral tənliyinindən görünür ki, $y(x_0) = y_0$. Bu da o deməkdir ki, (2) şərti ödənir və *y(x)* funksiyası (1), (2) məsələsinin həllidir (Elsholts, 1991).

Lemma isbat olundu. Bu lemmanın isbatında belə nəticə çıxır ki, Koşi məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyinin isbatının əvəzinə inteqral tənliyin varlığı və yeganəliyi məsələsinə baxılmalıdır (Belyayev, 2009, s. 3-10). Yəni (3) inteqral tənliyini ödəyən kəsilməz funksiyanın varlığını isbat etmək kifayətdir. Bunun üçün ardıcıl yaxınlaşma üsulundan istifadə edək. Burada əsasən mərkəzi (x_0, y_0) nöqtəsində olan Π düzbucaqlısına baxılır və nəzərə alınır ki, $[x_0 - a, x_0 + a]$ parçasına daxil olan elə bir $[x_0 - h, x_0 + h]$ parçası var ki, bu parçada $f(x,y)$ funksiyası *y*-ə nəzərən kəsilməzdir və Lipşits şərtini ödəyir. İsbat etmək olar ki, bu parçada Koşi məsələsinin həlli var və yaxud bu həll verilmiş parçadan kənara

çıxır (Astashova & Nikishkin, 2010). Parçadan kənarda həllin varlığı $h = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$ sabitindən asılı olaraq ya davam edə bilər ya da bu həllin varlığı və yeganəliyi pozula bilər. Teorem

$$[x_0 - h, x_0 + h], \; h = \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right) \tag{4}$$

şərti daxilində isbat edilir.

Pikar teoreminin isbatı: Verilmiş şərtlər daxilində Pikar yaxınlaşmasını quraq. $y(x_0)=y_0$ sıfırıncı yaxınlaşmadır. $y=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y(s)\right)ds$ inteqral tənliyinə əsasən n sayda yaxınlaşmanı yazmaq olar (Eltsholts, 1991).

$$y_1(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_0(s)\right)ds$$

$$y_2(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_1(s)\right)ds$$

....

$$y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_{n-1}(s)\right)ds$$

Qurulmuş bu yaxınlaşmaların Π düzbucaqlısınən daxilinə düşməsini isbat etmək zəruridir. Bu yaxınlaşmanın hər birində $f(x,y)$ funksiyasının y-in hər bir cütlərinə nəzərən Lipşits şərti ödənir. Əgər bu yaxınlaşmaların $\left[x_0-h,\,x_0+h\right]$ coxluğunda müntəzəm olaraq hər hansı bir funksiyaya yığılması isbat olunarsa, onda bu limitin inteqral tənliyin həlli olması təsdiq olunmuş olur (Bufetov, Goncgaruk, & Ilyashenko, 2019). Beləliklə, burada məqsəd bu yaxınlaşmaları və onların müntəzəm yığılmasını isbat etməkdir. Əvvəlcə isbat edək ki, bütün yaxınlaşmalar Π düzbucaqlısının daxilində yerləşir və $y_n(x)$ bu düzbucaqlının daxilindən kənara çıxmır (Blandin, 2015, pp. 1044-1050). $x\in\left[x_0-h,\,x_0+h\right]$ üçün $\left(x,\,y_n(x)\right)\in\Pi$ və $\left|y_n-y_0\right|\le b$. Əgər $n=1$ olarsa, onda

$$\left|y_1-y_0\right|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_0(s)\right)ds\right|\le\left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_0(s)\right)\right|\cdot\left|ds\right|\le M\left|x-x_0\right|\le M\,h\le M\cdot\frac{b}{M}=b$$

Fərz edək ki, $y_{n-1}(x)$ üçün isbat edilmişdir ki, $\left(x,\,y_{n-1}(x)\right)\in\Pi$, yəni $\left|y_{n-1}-y_0\right|\le b$. İsbat edək ki, $y_n(x)$ üçün doğrudur:

$$\left|y_n-y_0\right|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_{n-1}(s)\right)ds\right|\le\left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_{n-1}(s)\right)\right|\cdot\left|ds\right|\le M\left|x-x_0\right|\le M\,h\le M\cdot\frac{b}{M}=b$$

$\left\{y_n(x)\right\}$ ardıcıllığının müntəzəm $\left|x-x_0\right|\le h$ şərtində yığılan olmasını isbat etmək üçün $S_n=y_n$ xüsusi cəmlərini quraq.

$$y_0(x)+\left(y_1(x)-y_0(x)\right)+\left(y_2(x)-y_1(x)\right)+\cdots+\left(y_n(x)-y_{n-1}(x)\right)+\cdots$$

$$S_0=y_0(x)$$

$$S_1=y_0(x)+\left(y_1(x)-y_0(x)\right)\;\Rightarrow S_1=y_1(x)$$

$$S_2=y_0(x)+\left(y_1(x)-y_0(x)\right)+\left(y_2(x)-y_1(x)\right)\;\Rightarrow S_2=y_2(x)$$

....

$$S_n=y_0(x)+\left(y_1(x)-y_0(x)\right)+\left(y_2(x)-y_1(x)\right)+\cdots+\left(y_n(x)-y_{n-1}(x)\right)\;\Rightarrow S_n=y_n(x)$$

Sıranın ümumi həddinin modulunu induksiya ilə qiymətləndirək. $n=1$ olduqda

$$\left|\,y_1(x)-y_0(x)\,\right|=\left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(s,y_0(s)\right)ds\right|\le M\left|x-x_0\right|\le M\,h$$

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))]ds\right|\le\int_{x_0}^{x}|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|\cdot|ds|$$

$$|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|\le L|y_1(s)-y_0(s)|$$

$$\int_{x_0}^{x}|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|\cdot|ds|\le L\int_{x_0}^{x}|y_1(s)-y_0(s)|\cdot|ds|\le L\int_{x_0}^{x}M|s-x_0|\cdot|ds|\le LM\frac{|x-x_0|^2}{2}\le\frac{LMh^2}{2}$$

$$|y_3(x)-y_2(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))]ds\right|\le\int_{x_0}^{x}|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))|\cdot|ds|$$

$$|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))|\le L|y_2(s)-y_1(s)|$$

$$\int_{x_0}^{x}|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))|\cdot|ds|\le L\int_{x_0}^{x}|y_2(s)-y_1(s)|\cdot|ds|\le L\int_{x_0}^{x}M|s-x_0|^2\cdot|ds|\le L^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!}\le\frac{L^2Mh^3}{3!}$$

İnduksiyaya görə, $|y_n(x)-y_{n-1}(x)|=L^{n-1}M\dfrac{|x-x_0|^n}{n!}$ olmasının doğruluğunu fərz edir $|y_{n+1}(x)-y_n(x)|$ üçün qiymətləndirməni isbat edək.

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\le\int_{x_0}^{x}|f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))|\cdot|ds|$$

$$|f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))|\le L|y_n(s)-y_{n-1}(s)|$$

$$\int_{x_0}^{x}|f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))|\cdot|ds|\le L^{n-1}\frac{M|x-x_0|^n}{n!}\le L^n\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\le L^n\frac{Mh^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}L^{n-1}M\dfrac{h^n}{n!}$ sırası yığılan olarsa, onda $|x-x_0|\le h$ və $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x)-y_{n-1}(x))$ sırası $[x_0-h,x_0+h]$ parçasında mütləq və müntəzəm yığılandır. Dalamber əlamətinə əsasən $\sum_{n=0}^{\infty}L^{n-1}M\dfrac{h^n}{n!}$ sırasının yığılan olmasını yoxlayaq.

$$u_n=L^{n-1}M\frac{h^n}{n!},\ u_{n+1}=L^nM\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}L^nM\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{L^{n-1}Mh^n}=L\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=L\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Buradan alınır ki, $\sum_{n=0}^{\infty}L^{n-1}M\dfrac{h^n}{n!}$ sırası yığılandır. Deməli, $S_n(x)=y_n(x)$ cəmi $[x_0-h,x_0+h]$ parçasında mütləq və müntəzəm olaraq $\bar{y}(x)$ kəsilməz funksiyasına yığılır (Veysova, Paşayeva, Rəsulova, 2021, s. 50-57).

İsbat olundu ki, $\{y_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı $|x-x_0|\le h$ və $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ olduqda kəsilməz $\bar{y}(x)$ funksiyasına müntəzəm olaraq yığılır. Bundan əlavə, Π düzbucaqlısının qapalı olmasından alınır ki, $(x,\bar{y}(x))\in\Pi$.

İndi isə $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y_{n-1}(s)\right) ds$ ardıcıl yaxınlaşmasının hər iki tərəfində $n \to \infty$ olduqda limitə kecək.

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, y_{n-1}(s)\right) ds \right]$$

$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \bar{y}_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s) = \bar{y}_{n-1}(s)$ olduğundan

$$\bar{y}_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \bar{y}_{n-1}(s)\right) ds \tag{5}$$

olar. Burada inteqral altında limitə keçmənin mümkünlüyünü isbat edək. Yəni isbat edək ki, $|x - x_0| \le h$ olduqda,

$$\int_{x_0}^{x} f\left(s, y_{n-1}(s)\right) ds \to \int_{x_0}^{x} f\left(s, \bar{y}_{n-1}(s)\right) ds$$

$|x - x_0| \le h$ intervalında $y_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \bar{y}(x)$ müntəzəm yığıldığından alınır ki,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \ge N, \forall x : |x - x_0| \le h, \quad |y_n(x) - \bar{y}(x)| < \varepsilon .$$

$$\left| \int_{x_0}^{x} f\left(s, y_{n-1}(s)\right) ds - \int_{x_0}^{x} f\left(s, \bar{y}_{n-1}(s)\right) ds \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(s, y_{n-1}(s)\right) - f\left(s, \bar{y}(s)\right) \right| ds \right|$$

Axırıncı bərabərsizlikdə inteqralaltı ifadə Lipşits şərtini ödəyir:

$$\left| f\left(s, y_{n-1}(s)\right) - f\left(s, \bar{y}(s)\right) \right| \le L \left| y_{n-1}(s) - \bar{y}(s) \right| .$$

Beləliklə,

$$\left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(s, y_{n-1}(s)\right) - f\left(s, \bar{y}(s)\right) \right| ds \right| \le L \varepsilon h .$$

Buradan inteqral altında limitə keçmənin mümkünlüyü alınır. Bu isə o deməkdir ki, $\bar{y}(x)$ funksiyası (5) inteqral tənliyinin həllidir. Yəni verilmiş diferensial tənliyin həllinin varlığı $h = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ şərti daxilində isbat edilmiş olur. Teoremi ifadə edərkən qeyd edilmişdir ki, həllin varlığını müəyyən edən intervalın qiymətləndirilməsində Lipşits sabiti də daxil edilməlidir (Matveyev, 2010). Lipşits sabitindən bu isbat prosesində necə istifadə olunmasına baxaq və həllin yeganəliyini isbat edək.

Həllin yeganəliyinin isbatı: Burada da Koşi məsələsinin həllinin əvəzinə inteqral tənliyin həllinə baxılır. Fərz edək ki, (5) inteqral tənliyinin $\bar{y}(x)$ və $\tilde{y}(x)$ kimi iki həlli var:

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \bar{y}(s)\right) ds \ \text{ və } \ \tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(s, \tilde{y}(s)\right) ds$$

Bu tənlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq,

$$\left| \bar{y}(x) - \tilde{y}(x) \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f\left(s, \bar{y}(s)\right) - f\left(s, \tilde{y}(s)\right) \right| ds \right|$$

Burada $\left(s, \bar{y}(s)\right) \in \Pi$, $\left(s, \tilde{y}(s)\right) \in \Pi$ olur və inteqralaltı ifadə

$$\left| f\left(s, \bar{y}(s)\right) - f\left(s, \tilde{y}(s)\right) \right| \le L \left| \bar{y}(s) - \tilde{y}(s) \right|$$

Lipşits şərtini ödəyir. Onda

$$\left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left| f\left(s,\bar{y}(s)\right)- f\left(s,\tilde{y}(s)\right) \right| ds\right| \le L \sup_{|x-x_0|\le h} \left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| \cdot h \qquad (6)$$

yazmaq olar. Qeyd edək ki, $\sup\limits_{|x-x_0|\le h} \left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| \ge 0$. (6) bərabərsizliyindən

$$\sup_{|x-x_0|\le h} \left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| \le Lh \sup\left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right|$$

$$\left(1-Lh\right) \sup_{|x-x_0|\le h} \left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| \le 0$$

alınır. Yəni $1-Lh \ge 0$ olduqda, $\sup\limits_{|x-x_0|\le h} \left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| \le 0$ olar. Bu isə o deməkdir ki, $h < \frac{1}{L}$ olduqda, $\sup\left|\bar{y}(x)-\tilde{y}(x)\right| = 0 \Rightarrow \bar{y}(x)=\tilde{y}(x)$, $|x-x_0| \le h$ və $h=\min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$. Bununla da verilmiş diferensial tənliyin həllinin yeganəliyi isbat olundu.

Nəticə

Adi diferensial tənliklərdə həllin varlığı teoremlərinin qeyri-konstruktiv xarakteri fonunda bu tənliklərin Pikar üsulu ilə həllin qurulması metodunun nəzəri əsaslarına fərqli yanaşma tərzi göstərilmişdir.

Qoyulmuş məsələnin şərtləri daxilində nəzəri olaraq isbat olunan təkliflər və ümumiyyətlə, məsələnin həlli təsdiq olunmuş klassik qaydalara tabedir. Həllin qurulma imkanının təmin olunması və konsruktiv metodunun verilə bilməsi üçün istinad olunan teorem və təkliflərin fərqli təribatı göstərir ki, uyğun isbat mexanizmi bütün ardıcıl yaxınlaşmaların verilmiş düzbucaqlının daxilində yerləşirməsini və həllin bu düzbucaqlının daxilində yeganəliyini təsdiq edir. Qoyulmuş məsələnin şərtinə əsasən verilmiş çoxluqda həllə ardıcıl yaxınlaşmaların müntəzəm olaraq yığılmasının isbatı bu limitin inteqral tənliyin həlli olmasını təsdiqləyir.

Ədəbiyyat

1. Veysova, S. Ə., Paşayeva, S. T., Rəsulova, M. Ə. (2020). Diferensial tənliklərin həllində yeganəlik şərtinin araşdırılması. *H. Əliyev adına AAHM, Elmi əsərlər məcmuəsi*, 1(34), 40-46.
2. Veysova, S. Ə., Paşayeva, S. T., Rəsulova, M. Ə. (2021). Birinci tərtib diferensial tənliyin yarımintervalda həllinin davamlılığı. *H. Əliyev adına AAHM*, *Elmi əsərlər məcmuəsi*, 1(36), 50-57.
3. Astashova, I. V. (2012). *Differensialnie uravneniya.* Nauka.
4. Astashova, I. V., & Nikishin, V. A. (2010). *Praktikum po kursu "Differensialnie uravneniya".* MESI.
5. Blandishn, A. S. (2013). O razreshimosti na osi nekotorikh klassov differensialno-raznostnikh uravneniy. *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Seriya: Estestvennie i tekhnicheskie nauki,* 18(5-2), 2449-2451.
6. Bufetov, A. I., Goncharuk, N. B., & Ilyashenko, Y. S. (2019). *Obiknovennie differensialnie uravneniya*.
7. Blandin, A. S. (2015). O razreshimosti ha osi avtonomnikh differensialnikh uravneniy s ogranichennim zapazdivaniem. *Vestnik Tambovskogo Universiteta. Seriya: Estestvennie i tekhnicheskie nauki,* 20(5), 1044-1050.
8. Belyayev, S. A. (2009). Pochti prodolzhaemost resheniy differensialnik uravneniy. *Matematicheskie zametki*, 85(1), 3-10.
9. Egorov, A. I. (2005). Obiknovennie differensialnie uravneniya s prilozheniyami.
10. Elsholts, L. E. (1991). *Differensialnie uravneniye i variasionnie ischisleniya*. Nauka.
11. Matveev, N. M. (2010). *Metodi integrirovaniya differensialnikh uravneniy*.

12. Pontryaqin, L. S. (1986). *Obiknovennie differensialnie uravneniya*. Nauka.
13. Petrovskiy, I. G. (2009). *Leksii po teorii obiknovennıx differensialnikh uravneniy*. Nauka.

Daxil oldu: 02.09.2024
Baxışa göndərildi: 27.10.2024
Təsdiq edildi: 04.12.2024
Çap olundu: 20.12.2024